Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Ι

13 Ιουνίου 2019

Θέμα 1. [0.5+1]

(α΄) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = 1/z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, απεικονίζει $1-1$ και επί το $A = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z| < 1\}$ στο $B = \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\}$.

(β΄) Για δοσμένα, σταθερά $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, βρείτε όλες τις ρίζες $z \in \mathbb{C}$ της εξίσωσης $e^{z^2+a} = b$ συναρτήσει των a και b.

Θέμα 2. [0.5+0.5]

(α΄) Υπολογίστε, αν υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \log\Big(\big(2 + \dfrac{1}{n\pi}\big)e^{in\pi}\Big)$.

(β΄) Αποφανθείτε, τεκμηριωμένα, αν η $\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \big(-\infty, 0\big] \to \mathbb{R}$ μπορεί να επεκταθεί κατά συνεχή τρόπο στο σύνολο $\mathbb{C} \setminus \big(-\infty, 0\big)$.

Θέμα 3. [0.5+1+0.5+0.5] Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in \mathbb{C}$.

(α΄) Ορίστε τους τελεστές $\partial, \bar{\partial}$.

(β΄) Διατυπώστε, τεκμηριωμένα, την $\mathbb{R}$-διαφορισιμότητα της f στο z_0 με χρήση των τελεστών $\partial, \bar{\partial}$ στο τμήμα «$\cdots$» του ορίου

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \cdots}{z - z_0} = 0.$$

(γ΄) Δείξτε, με χρήση των εξισώσεων Cauchy-Riemann, ότι η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο z_0, αν και μόνο αν είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη στο z_0 και $\bar{\partial} f(z_0) = 0$, και εκφράστε την παράγωγό της με χρήση του τελεστή ∂.

(δ΄) Υπολογίστε, όπου υπάρχει, την παράγωγο της συνάρτησης $(-1)^z$, $z \in \mathbb{C}$.

Θέμα 4. [1+1]

(α΄) Έστω $R > 0$ η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ με $z, z_0, a \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n (z-a)^{n-1}$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης R.

(β΄) Έστω το πολυώνυμο $p(z) = c_m z^m + \ldots + c_1 z + c_0$ με $z, c_m, \ldots, c_0 \in \mathbb{C}$, $c_m \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$, και έστω τυχαίο $a \in \mathbb{C}$. Αναπτύξτε το p σε δυναμοσειρά γύρω από το a και βρείτε την αντίστοιχη ακτίνα σύγκλισης $R(a)$.

Θέμα 5. [0.5+1] Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και γ μια C^1-καμπύλη στο D με αρχή a και τέλος b.

(α΄) Έστω $f : D \to \mathbb{C}$ συνεχής και φραγμένη. Δείξτε ότι υπάρχει $C > 0$, έτσι ώστε $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq CL(\gamma)$, όπου $L(\gamma)$ το μήκος της γ.

(β΄) Έστω $f : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Δείξτε ότι $\int_\gamma z^2 f'(z)dz = b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_\gamma z f(z)dz$.

Θέμα 6. [1+0.5]

(α΄) Έστω f ακέραια με $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f'(z) = 1 \ \forall\ z \in \mathbb{C}$.

(β΄) Έστω $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ πολυώνυμο βαθμού $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $q = \frac{1}{p}$ έχει το πολύ n διαφορετικούς πόλους, οι οποίοι έχουν όλοι τάξη $\leq n$.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!